

Линейная алгебра.

Тема 1. Матрицы и определители.

§1. Матрицы и их виды

Матрица обозначается заглавными латинскими буквами (A, B, C, \dots).

Определение 1. Прямоугольная таблица вида $A_{m \times n}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей*.

a_{ij} - элемент матрицы, i – номер строки, j – номер столбца.

Виды матриц:

1. Величина $m \times n$ называется *размерностью* матрицы ($m \neq n$).

2. Если $m = n$, матрица называется *квадратной*, ее размерность n .

3. Если все элементы матрицы нули, то матрица называется нулевой.

4. Матрица вида:
$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

называется диагональной.

5. Матрица вида:
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
 называется
единичной.

6. Матрица вида:
$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}),$$
 называется
матрица-строка.

7. Матрица вида:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$
 называется
матрица-столбец.

§2. Определители 2, 3 и n-го порядка

Пусть даны две квадратные матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

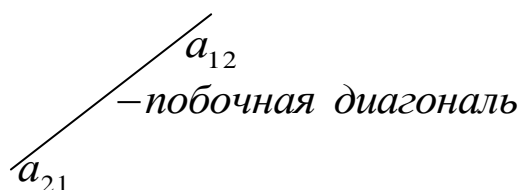
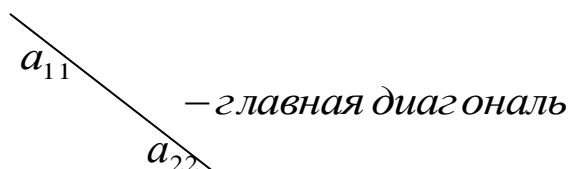
матрица 2-го порядка

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

матрица 3-го порядка

Определение 1. Определителем второго порядка матрицы A_1 называется число, обозначаемое Δ и равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}, \text{ где}$$



Пример. Вычислить определитель 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

Определение 2. Определителем 3-го порядка квадратной матрицы A_2 называется число вида:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Это один из способов вычисления определителя.

Пример. Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (0 \cdot 7 - 5 \cdot 2) - 2 \cdot (4 \cdot 7 - 1 \cdot 2) +$$

$$3 \cdot (4 \cdot 5 - 1 \cdot 0) = -30 - 52 + 60 = -22$$

Определение 3. Если определитель состоит из **п-строк** и **п-столбцов**, то он называется **определителем п-го порядка**.

Свойства определителей:

- 1) Определитель не меняется при транспонировании (т.е. если в нем строки**

и столбцы поменять местами с сохранением порядка следования).

- 2) Если в определителе поменять местами какие-либо две строки или два столбца, то определитель изменит только знак.**
- 3) Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.**
- 4) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.**
- 5) Определитель равен нулю, если элементы каких-либо двух строк равны или пропорциональны.**
- 6) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.**

Пример.

$$\begin{array}{c} (-3) \\ \swarrow \\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & -13 & 12 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -13 & 12 \end{vmatrix} = -24 + 91 = 67 \\ \nearrow \\ (2) \end{array}$$

Определение 4. Определитель, полученный из данного путем вычеркивания столбца и строки, называется *минором* соответствующего элемента. M_{ij} элемента a_{ij}

Определение 5. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} , называется выражение

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

§3. Действия над матрицами

3.1. Линейные операции.

1) **Матрицы можно складывать**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

2) **Матрицы можно умножать на постоянное число:**

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

3) **Матрицы можно вычитать:**

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

3.2. Умножение матриц.

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix};$$

$$B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$C_{2 \times 2} = A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$$

*Произведение матрицы A на матрицу B есть новая матрица $C = A \cdot B$, элементы которой равны сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B . Произведение матрицы A на матрицу B можно находить только в том случае, если число **столбцов матрицы A** равно числу **строк матрицы B** . В противном случае, произведение невозможно.*

Пример.

$$\begin{aligned} C = A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 17 & 20 \\ 20 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Замечание:

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (не подчиняется свойству коммутативности)

§4. Обратная матрица.

Обратная матрица существует только для квадратной матрицы, причем матрица должна быть невырожденной.

Определение 1. Матрица A называется *невырожденной*, если определитель этой матрицы не равен нулю

Определение 2. A^{-1} называется *обратной матрицей* для данной невырожденной квадратной матрицы A , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы
1 способ (с помощью алгебраических дополнений)

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^T$$

1) Вычисляем определитель данной матрицы ($\Delta \neq 0$).

2) Находим алгебраические дополнения элементов определителя.

3) Составляем матрицу из этих алгебраических дополнений.

4) Транспонируем полученную матрицу.

5) Делим транспонированную матрицу на величину определителя Δ .

6) Делаем проверку: $A \cdot A^{-1} = E$

Пример 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; A^{-1} = ?$

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad \Delta \neq 0$$

Следовательно, матрица невырожденная и имеет обратную.

2) Найдем все алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38$$

$$A_{13} = -27$$

$$A_{21} = 1 \quad A_{22} = -41 \quad A_{23} = 29$$

$$A_{31} = -1 \quad A_{32} = 34 \quad A_{33} = -24$$

3) Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$

4) Транспонируем полученную матрицу:

$$A_1^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

5) Разделим матрицу A_1^T на величину определителя:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6) Проверка: $A \cdot A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогично проверяем $A^{-1} \cdot A = E$.

Следовательно, A^{-1} - обратная матрица.

2 способ (с помощью элементарных преобразований):

- 1) отбрасывание нулевой строки (столбца);**
- 2) умножение всех элементов строки (столбца) на постоянное число не равное нулю;**
- 3) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;**
- 4) прибавление к каждому элементу одной строки соответствующего элемента другой строки, умноженного на любое число, не равное нулю.**

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}. \text{ Найти } A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & +1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1,5 & 0,5 \end{array} \right),$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

§5. Ранг матрицы.

Определение 1. Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы и обозначается $\text{rang}(A), r(A)$.

Из определения следует:

- 1) Ранг матрицы $A_{m \times n}$ не превосходит меньшего из чисел m и n , т.е.
$$r(A) \leq \min \{m; n\}.$$
- 2) Ранг матрицы A равен нулю, если эта матрица нулевая.
- 3) Для квадратной матрицы n -го порядка ранг равен n , если матрица A невырожденная ($\Delta \neq 0$).
- 4) Ранг матрицы равен числу ступенек эквивалентной ступенчатой матрицы, получаемой из данной матрицы с помощью элементарных преобразований

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как число ступенек равно 2, то ранг равен 2.